PITAGORAS ACADEMIA

ÁLGEBRA

Profesor
Freddy Ávalos C

PRODUCTOS NOTABLES

TEORIA

Se denominan productos notables a todas aquellas identidades algebraicas obtenidas a partir de la multiplicación, que son realizadas directamente sin necesidad de realizar dicha operación (propiedad distributiva).

PRINCIPALES IDENTIDADES

1. Cuadrado de un Binomio:

- ✓ $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- ✓ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

Nota: Al producto obtenido, se le denomina **TRINOMIO CUADRADO PERFECTO(TCP)**

$$(x+3)^2 = x^2 + 2.x.3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(2x-5)^2 = (2x)^2 - 2.(2x).5 + 5^2$$
$$= 4x^2 - 20x + 25$$

2. Identidad de Legendre:

- ✓ $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- ✓ $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

NOTA: $(a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab$

$$(x+2)^2 + (x-2)^2 = 2(x^2 + 2^2) = 2(x^2 + 4)$$

$$(3x+2)^2 - (3x-2)^2 = 4(3x)(2) = 24x$$

PRODUCTOS NOTABLES

3. Suma por Diferencia:

✓ $(a+b)(a-b)= \underbrace{a^2 - b^2}$

Nota: Al producto obtenido, se le denomina **DIFERENCIA DE CUADRADOS.**

$$(x+6)(x-6) = (x)^2 - 6^2 = x^2 - 36$$

$$(3x+5)(3x-5) = (3x)^2 - 5^2 = 9x^2 - 25$$

4. Multiplicacion de dos binomios con un termino común:

IDENTIDAD DE STEVEN

✓ $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$

$$(x+6)(x+2) = (x)^2 + (6+2)x + 6.2 = x^2 + 8x + 12$$

✓ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$

$$(x+2)(x+5)(x+3) = x^3 + (2+5+3)x^2 + (2.5+5.3+2.3)x + 2.5.3$$

$$(x+2)(x+5)(x+3) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$$

5. Binomio al cubo:

✓ $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

✓ $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$$(2x+1)^3 = (2x)^3 + 3(2x)^2.1 + 3(2x).1^2 + 1^3$$

$$(2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

6. Identidad de Cauchy:

✓ $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

✓ $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Sabiendo que $x + y = 3$ *además* $xy = 2$

Calcular: $x^3 + y^3$

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$$

$$3^3 = x^3 + y^3 + 3.2.3$$

$$9 = x^3 + y^3$$

PRODUCTOS NOTABLES

7. Miltiplicacion Binomio por Trinomio

- ✓ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
- ✓ $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

8. Trinomio al cuadrado:

- ✓ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)$

$$(x+2y+3)^2 \quad = x^2+(2y)^2+3^2+2(x(2y)+(2y)(3)+x.3)$$

$$(x+2y+3)^2=x^2+4y^2+9+4xy+12y+6x$$

9. Trinomio al cubo:

- ✓ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(a+c)$
- ✓ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ac)-3abc$

10. Identidades Condicionales

Si a+b+c=0 , entonces se cumple algunas de las siguientes condiciones

- ✓ $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
- ✓ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- ✓ $a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)^2$

TEOREMAS

i) Si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ → *Se cumple : a=b=c ; a,b,c ∈ R*

ii) Si $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{a+b}$ $entonces\ a = b\ ; a, b \in R\ - \{0\} \wedge a \neq\ -b$

iii) Si $a^2 + b^2 = 0$ $, entonces\ a = 0\ \ y\ \ b = 0; a, b \in R$

PRODUCTOS NOTABLES

IDENTIDADES ESPECIALES

IDENTIDAD DE GAUSS

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

IDENTIDAD DE ARGAND

$$a^{4m} + a^{2m}b^{2n} + b^{4n} = (a^{2m} + a^m b^n + b^{2n})(a^{2m} - a^m b^n + b^{2n})$$

EJEMPLOS

$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^8 + a^4b^4 + b^8 = (a^4 + a^2b^2 + b^4)(a^4 - a^2b^2 + b^4)$$

$$a^{16} + a^8b^8 + b^{16} = (a^8 + a^4b^4 + b^8)(a^8 - a^4b^4 + b^8)$$

MOMENTO DE PRACTICAR

PROBLEMAS Y RESOLUCIÓN

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si $a+b=3 \wedge ab=1$ calcule a^2+b^2.

$$a+b=3$$

$$(a+b)^2=9$$

$$a^2+2ab+b^2=9$$

$$a^2+2+b^2=9$$

$$\boldsymbol{a^2+b^2=7}$$

2. Reduzca

$$E=\left[\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right]\left[\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$E=\left[\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}\right]\left[\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$E=\left[\frac{2(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)}\right]\left[\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right]$$

$$\boldsymbol{E=2}$$

3. Si la suma de dos números positivos es 6 y su producto es 4, cuando vale la diferencia de dichos números.

$$a+b=6 \qquad ab=4$$

$$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

$$(6)^2-(a-b)^2=4(4)$$

$$(a-b)^2=20$$

$$a-b=\pm\sqrt{20}$$

$$a-b=\pm\sqrt{4.5}$$

$$a-b=\pm\sqrt{4}.\sqrt{5}$$

$$\boldsymbol{a-b=\pm 2\sqrt{5}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

4. Si $x^2-3x+1=0$, halle el valor de

$$E = x^4 + \frac{1}{x^4}$$

Es evidente que $x \neq 0$ por lo tanto podemos dividir entre x

$$\frac{x^2}{x} - \frac{3x}{x} + \frac{1}{x} = \frac{0}{x}$$

$$x - 3 + \frac{1}{x} = 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 3$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = 3^2 - 2 = 7$$

$$\boldsymbol{E = x^4 + \frac{1}{x^4} = 7^2 - 2 = 47}$$

5. Si $a+b=4 \wedge ab=2$

¿cuál es el valor de $(a-b)^6$?

$$(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$$

$$(4)^2 - (a-b)^2 = 4(2)$$

$$(a-b)^2 = 8$$

$$\left((a-b)^2\right)^3 = 8^3$$

$$\boldsymbol{(a-b)^6 = 512}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

6. Si $x^2+4x-1=0$

halle el valor de

$E=(x+5)(x-2)(x-1)(x+6)$

A) 8 B) 22 C) 44
D) 17 E) 26

$$x^2+4x-1=0 \quad entonces\ x^2+4x=1$$

$$E=(x+5)(x-2)(x-1)(x+6)$$

$$E=(x+5)(x-1)(x-2)(x+6)$$

$$E=(x^2+4x-5)(x^2+4x-12)$$

$$E=(1-5)(1-12)$$

$$\boldsymbol{E=44}$$

7. Si $a+b=1 \wedge ab=1/2$

calcule $E=\dfrac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$.

A) 0 B) −1 C) 1
D) −9 E) 10

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$1=a^2+2\left(\frac{1}{2}\right)+b^2$$

$$a^2+b^2=0$$

$$(a^2+b^2)^2=0$$

$$a^4+2a^2b^2+b^4=0$$

$$a^4+2(ab)^2+b^4=0$$

$$a^4+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+b^4=0$$

$$a^4+b^4=-\frac{1}{2}$$

$$1=a^3+b^3+3\left(\frac{1}{2}\right)\ (1)$$

$$-\frac{1}{2}=a^3+b^3$$

$$E=\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}$$

$$\boldsymbol{E=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

11. Reduzca

$E=(x-5)(x-1)(x-2)(x-6)$

sabiendo que $x^2=7x+3$.

A) 117 B) 100 C) 221
D) 145 E) 82

$$E=(x-5)(x-2)(x-1)(x-6)$$

$$E=(x^2-7x+10)(x^2-7x+6)$$

$$\text{además ya que } x^2-7x=3$$

$$E=(3+10)(3+6)$$

$$\boldsymbol{E=117}$$

12. Si $a-b=4 \wedge ab=2$

calcule el valor de a^3-b^3.

A) 66 B) 99 C) 55
D) 88 E) 44

$$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$

$$4^3=a^3-b^3-3(2)(4)$$

$$\boldsymbol{88=a^3-b^3}$$

13. Reduzca

$E=(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)-(n^2+5n+5)^2$

A) 1 B) −1 C) 2
D) −2 E) 3

$$E=(n+1)(n+4)(n+2)(n+3)-(n^2+5n+5)^2$$

$$Sea\ \ n^2+5n=a$$

$$E=(a+4)(a+6)-(a+5)^2$$

$$\boldsymbol{E=-1}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si $x-\frac{1}{x}=6$; entonces, halle el valor de

$$E=x^2-\frac{1}{x^2}-8\sqrt{10}$$

A) $3\sqrt{10}$

B) $-2\sqrt{10}$

C) $6\sqrt{10}$

D) $4\sqrt{10}$

E) 0

$$x-\frac{1}{x}=6$$

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=36$$

$$x^2-2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=36$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=38$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=4.x^2.\frac{1}{x^2}$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=4.x^2.\frac{1}{x^2}$$

$$(38)^2-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=4$$

$$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=1440$$

$$x^2-\frac{1}{x^2}=\pm 12\sqrt{10}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

2. Si $x+1=2\sqrt{2}\sqrt{x}$, determine el valor de

$$x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}$$

A) 221
B) 230
C) 232
D) 238
E) 240

$$x+1=2\sqrt{2}.\sqrt{x}$$

$$x^2+2x+1=8x$$

$$x^2+1=6x$$

$$x+\frac{1}{x}=6$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=34$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=6^3-3(6)=198$$

$$\boldsymbol{x+\frac{1}{x}+x^2+\frac{1}{x^2}+x^3+\frac{1}{x^3}=238}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

3. Simplifique $K=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}$

sabiendo que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0.$

A) 1 B) 0 C) 2
D) 4 E) –3

$$K=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}$$

$$K+3=\frac{a+b}{c}+1+\frac{b+c}{a}+1+\frac{a+c}{b}+1$$

$$K+3=\frac{a+b+c}{c}+\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}$$

$$K+3=(a+b+c)(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$$

$$K+3=0$$

$$K=-3$$

PROBLEMAS RESUELTOS

4. Si $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=8$, entonces halle el valor de $x^2-\frac{1}{x^2}$

A) $4\sqrt{2}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=8$$

$$x^2+2.x.\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=8$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=6$$

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=4.x^2.\frac{1}{x^2}$$

$$(6)^2-\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=4$$

$$\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2=32$$

$$\boldsymbol{x^2-\frac{1}{x^2}=\pm 4\sqrt{2}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

5. Si $a+b+c=0$, reduzca

$$E=\frac{(5a+b+c)^2+(5b+c+a)^2+(5c+a+b)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

A) 16 B) −16 C) 12
D) −12 E) −32

$$5a+b+c=4a+a+b+c=4a$$

$$5b+c+a=4b+b+c+a=4b$$

$$5c+a+b=4c+c+a+b=4c$$

$$E=\frac{(4a)^2+(4b)^2+(4c)^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$E=\frac{16a^2+16b^2+16c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$E=\frac{16(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\boldsymbol{E=16}$$

FIN DE LA SESIÓN

PRACTICA Y APRENDERÁS